Revisões de Matemática e Estatística

Joaquim J.S. Ramalho

Contents

1 Operadores matemáticos

1.1 Somatório

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Propriedades básicas (sendo a, c constantes):

1. $\sum_{i=1}^{n} c = nc$

2. $\sum_{i=1}^{n} cX_i = c\sum_{i=1}^{n} X_i$

3. $\sum_{i=1}^{n} (aX_i + cY_i) = a\sum_{i=1}^{n} X_i + c\sum_{i=1}^{n} Y_i$

1.2 Duplo somatório

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = \sum_{j=1}^{m} X_{1j} + \sum_{j=1}^{m} X_{2j} + \ldots + \sum_{j=1}^{m} X_{nj}$$

1.3 Produtório

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n$$

2 Funções matemáticas

2.1 Logaritmo natural

$$y = \ln(x)$$

também por vezes designado $\log_e x$ ou $\log(x)$. [$Nota$: nas máquinas de calcular em geral 'log' significa logaritmo de base 10, e 'ln' logaritmo de base e ou natural. Mas em muitos textos de economia aplicada e software estatístico os dois símbolos são usados indiferentemente para o logaritmo natural.]

Propriedades:

1. $\ln(x)$ só é definido para $x > 0$

2. $\ln(x) < 0$ para $0 < x < 1$

3. $\ln(1) = 0$

4. $\ln(x) > 0$ para $x > 1$

5. $\ln(e) = 1$

6. $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$

7. $\ln(x_1/x_2) = \ln(x_1) - \ln(x_2)$

8. $\ln(x^c) = c\ln(x)$

9. $\ln(x_1) - \ln(x_0) \approx (x_1 - x_0)/x_0$ ou $100 \cdot \Delta\ln(x) \approx \%\Delta x$ para Δx pequeno

2.2 Exponencial

$$y = \exp(x) = e^x$$

Propriedades:

1. $\exp(x) > 0$ para todo o x

2. $\exp(0) = 1$

3. $\exp(1) = e$

4. $\exp[\ln(x)] = x$ para $x > 0$

5. $\exp[c\ln(x)] = x^c$

6. $\exp(x_1) \cdot \exp(x_2) = \exp(x_1 + x_2)$

3 Álgebra matricial

3.1 Terminologia

- **Matriz**

$$\underset{(n\times k)}{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

- **Vector/vector linha**

$$\underset{(n\times 1)}{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \qquad \underset{(1\times n)}{u'} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

- **Matriz quadrada:** matriz A, $k \times k$. Casos particulares:

$$\begin{aligned}
\text{simétrica} &: \quad \underset{(k\times k)}{A} \text{ onde } a_{ij} = a_{ji} \qquad \text{Ex.: } \underset{(2\times 2)}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\
\text{diagonal} &: \quad \underset{(k\times k)}{A} = \operatorname{diag}\{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1k}\}\,; \text{ Ex.: } \underset{(2\times 2)}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \\
\text{identidade} &: \quad I = \operatorname{diag}\{1, 1, \ldots, 1\}\,; \qquad AI = IA = A
\end{aligned}$$

3.2 Operações com matrizes

- **Adição:** Se A e B são matrizes $n \times k$, então $A + B = C$, onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

- **Multiplicação por um escalar:** $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$

- **Multiplicação:** $\underset{(n\times k)}{A} \cdot \underset{(k\times p)}{B} = \underset{(n\times p)}{C}$ onde $c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}$

$$\text{Ex.: } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 27 & 25 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

1. $AB \neq BA$ (pré e pós-multiplicar por A difere, em geral)
2. Se A é $n \times k$ e B é $k \times n$, então AB é $n \times n$ e BA é $k \times k$
3. Sendo u um vector $n \times 1$, então $u'u = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$, um escalar, e $uu' = [u_i u_j]$, uma matriz $n \times n$
4. $(AB)\,C = A\,(BC)$
5. $A\,(B + C) = AB + AC$

- **Transposta**

Sendo $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times k$, então a transposta de A é a matriz A', $k \times n$, tal que $A' = [a_{ji}]$

Propriedades:

1. $(A')' = A$

2. $(\lambda A)' = \lambda A'$ para qualquer escalar λ

3. $(A+B)' = A' + B'$

4. $(AB)' = B'A'$; $\quad (ABC)' = C'B'A'$; $\quad$ etc.

5. $A = A'$ $\quad$ se A é simétrica

- **Inversa**

A matriz quadrada A diz-se invertível ou não singular se existir a matriz inversa A^{-1}, tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Propriedades:

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

2. $\left(A^{-1}\right)' = (A')^{-1}$

3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Cálculo:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{Adj}\,(A)$$

Ex.: $\quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Se $|A| = 0$, A é singular, ou seja A^{-1} não existe

4 Estatísticas descritivas

4.1 Média amostral

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Propriedades dos somatórios de desvios para a média:

1. $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)=0$
2. $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2$
3. $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)\left(Y_i-\bar{Y}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)Y_i=\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-n\bar{X}\bar{Y}$

4.2 Variância e desvio padrão amostrais

$$\begin{aligned}
S_x^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2 \\
S_x &= +\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}
\end{aligned}$$

4.3 Covariância e coeficiente de correlação amostrais

$$\begin{aligned}
S_{xy} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)\left(Y_i-\bar{Y}\right) \\
r_{xy} &= \frac{S_{xy}}{S_xS_y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)\left(Y_i-\bar{Y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2}}
\end{aligned}$$

5 Conceitos de probabilidade e estatística

5.1 Variável aleatória

- Uma variável aleatória X é uma variável cujo valor é um resultado numérico associado ao resultado de uma experiência aleatória. Existe um conjunto de realizações possíveis da variável aleatória, os quais formam o espaço probabilístico. Exemplo:
  - $X=\#$ de caras quando se atira ao ar uma moeda por 10 vezes
  - Espaço probabilístico é $\{0, 1, ..., 10\}$
  - Uma particular realização é $x=6$

5.2 Funções de distribuição e de densidade

- Cada realização x, ou conjunto de realizações, de uma variável aleatória X tem uma determinada probabilidade de ocorrência, a qual pode ser descrita por uma:
  - Função de distribuição cumulativa: $F(x)=P(X\leq x)$

- Função de densidade:
  - Variáveis discretas: $f(x) = P(X = x)$
  - Variáveis contínuas: $f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$

- Exemplos de funções de probabilidade: Normal, Qui-Quadrado, t de Student, F de Snedcor, Poisson, Bernoulli, Binomial,...

Propriedades:

1. $\sum_j f(x_j) = 1$
2. $0 \leq f(x_j) \leq 1$
3. $F(+\infty) = 1$

5.3 Valor esperado

$$E(X) = \mu_x = \begin{cases} \sum_j x_j f(x_j) & \text{se } X \text{ é V.A. discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx & \text{se } X \text{ é V.A. contínua} \end{cases}$$

Propriedades:

1. $E(c) = c$
2. $E(aX + c) = aE(X) + c$
3. $E(aX + cY) = aE(X) + cE(Y)$

5.4 Variância

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(X) &= \sigma_x^2 \\ &= E(X - \mu_x)^2 \\ &= E\left(X^2\right) - \mu_x^2 \end{aligned}$$

Propriedades:

1. $\operatorname{Var}(c) = 0$
2. $\operatorname{Var}(aX + c) = a^2 \operatorname{Var}(X)$
3. $\operatorname{Var}(aX + cY) = a^2 \operatorname{Var}(X) + c^2 \operatorname{Var}(Y) + 2ac \operatorname{Cov}(X, Y)$

5.5 Desvio Padrão

$$\sigma_x \equiv +\sqrt{\text{Var}(X)}$$

5.6 Covariância

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X,Y) &= \sigma_{xy} \\ &= E\left[(X-\mu_x)\left(Y-\mu_y\right)\right] \\ &= E(XY) - \mu_x\mu_y\end{aligned}$$

Propriedades (sendo a_i, c_i constantes):

1. $\text{Cov}(c, X) = 0$
2. $\text{Cov}(a_1X + c_1, a_2Y + c_2) = a_1a_2\,\text{Cov}(X,Y)$
3. $|\text{Cov}(X,Y)| \leq \sigma_x\sigma_y$ (desigualdade de *Cauchy-Schwartz*)

5.7 Coeficiente de correlação

$$\text{Corr}(X,Y) = \rho_{xy} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$

5.8 Valor esperado condicionado

$$E(Y|x) = \begin{cases} \sum_j y_j f(y_j|x) & \text{se } Y \text{ é V.A. discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y|x)\,dy & \text{se } Y \text{ é V.A. contínua} \end{cases}$$

Propriedades (sendo $a(X)$, $c(X)$ funções):

1. $E[c(X)|X] = c(X)$
2. $E[a(X)Y + c(X)|X] = a(X)E(Y|X) + c(X)$
3. Lei das expectativas iteradas: $E[E(Y|X)] = E(Y)$

5.9 Propriedades de variáveis aleatórias independentes

1. $E(XY) = E(X)\cdot E(Y)$
2. $E(Y|X) = E(Y)$
3. $\text{Cov}(X,Y) = 0$
4. $\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

5. $\rho_{xy} = 0$