Econometria I

Aula 31

Ricardo Gouveia-Mendes
ricardo.mendes@iscte-iul.pt

Licenciatura em Economia
2.º Semestre 2023-24

Heteroscedasticidade: Consequências e Soluções

Natureza e Efeitos da Heteroscedasticidade

- Heteroscedasticidade: $\mathbf{Var}(u_i|X) = \sigma_i^2 = \sigma^2 h(X_i)$
- Consequências sobre os estimadores OLS:
  - Não afeta **centricidade** e **consistência**
  - **Deixam de ser eficientes**
  - **Deixam de ter uma distribuição Normal**
    - Fórmula habitual da variância dos estimadores é incorreta
    - Não é possível fazer inferência
- Soluções:
  - Método dos Mínimos Quadrados *Robustos*
  - Método dos Mínimos Quadrados *Ponderados*

Método dos Mínimos Quadrados Robustos

- Como os estimadores continuam a ser centrados, só temos que nos **preocupar com a precisão**, recordando que:

$$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}|\mathrm{X}) = (\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}'\,\mathrm{Var}(\boldsymbol{u}|\mathrm{X})\,\mathrm{X}(\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}$$

- Com **Homoscedasticidade**:

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{u}|\mathrm{X}) = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathrm{I} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}|\mathrm{X}) = \sigma^2(\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}$$

Método dos Mínimos Quadrados Robustos

- E o estimador para $\boldsymbol{\sigma}^2$: $\hat{\sigma}^2 = SQR/(N-p) = \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}/(N-p)$
- Mas com **Heteroscedasticidade**:

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{u}|\mathrm{X}) \equiv \Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \qquad \hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{u}_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{u}_N^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}|\mathrm{X}) = (\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}'\,\Omega\,\mathrm{X}(\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}$$

Método dos Mínimos Quadrados Robustos
Propriedades

- Centricidade
- Consistência
- Não eficientes
- Distribuição Normal assimptótica
  - Fórmula da variância apenas válida assimptoticamente
  - Inferência apenas válida assimptoticamente

Método dos Mínimos Quadrados Ponderados

- Exige um **pressuposto sobre $h(\cdot)$** em $\mathrm{Var}(u_i|X_i) = \sigma^2 h(X_i)$
- Consiste em estimar por OLS um modelo transformado, em que **cada variável é dividida por $\sqrt{h(X_i)}$**

$$Y_i^* = \beta_0\, X_{0i}^* + \beta_1\, X_{1i}^* + \cdots + \beta_k\, X_{ki}^* + u_i^*$$

$$Y_i^* = \frac{Y_i}{\sqrt{h(X_i)}}, \qquad X_{0i}^* = \frac{1}{\sqrt{h(X_i)}},$$

$$X_{1i}^* = \frac{X_{1i}}{\sqrt{h(X_i)}}, \qquad \ldots, \qquad X_{ki}^* = \frac{X_{ki}}{\sqrt{h(X_i)}},$$

- A transformação **torna o modelo homoscedástico**

Método dos Mínimos Quadrados Ponderados
Propriedades

- Centricidade
- Consistência
- Eficiência
- Distribuição Normal
- A interpretação dos β é feita em função do modelo original
- Apesar do seu potencial é pouco usado

Exercícios

Exercício 8.1

Considere um modelo linear para explicar o consumo mensal de cerveja:

$$cerveja = \beta_0 + \beta_1 rend + \beta_2 preco + \beta_3 educ + \beta_4 fem + u$$

$$\mathbb{E}(u|rend, preco, educ, fem) = 0$$

$$\mathrm{Var}(u|rend, preco, educ, fem) = \sigma^2 rend^2$$

Escreva a equação transformada que tenha um erro homoscedástico.

$$\frac{cerveja}{rend} = \beta_0 \frac{1}{rend} + \beta_2 \frac{preco}{rend} + \beta_3 \frac{educ}{rend} + \beta_4 \frac{fem}{rend} + \frac{u}{rend}$$

Exercício 8.2 🖥️

Use os dados em `PRECASA.DTA` para este exercício.

Exercício 8.2 🖥️

b. Repita a) para o modelo

$$\ln(preco) = \beta_0 + \beta_1 \ln(lote) + \beta_2 \ln(area) + \beta_3 quartos + u$$

```
Call:
lm(formula = preco ~ I(log(lote)) + I(log(area)) +
quartos, data = df)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-109.270  -38.209   -4.924   23.890  217.590

Coefficients:
```

```
t test of coefficients:

               Estimate Std. Error t value  Pr(>|t|)
(Intercept)  -1347.8685   201.8352 -6.6781 2.463e-09 ***
I(log(lote))    61.4686    18.7275  3.2823  0.001502 **
I(log(area))   225.4347    33.4889  6.7316 1.940e-09 ***
quartos         19.2266     7.8263  2.4567  0.016082 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1
```

- As diferenças entre os desvios-padrão são menos significativas
- Não há diferenças quanto à significância das variáveis

Exercício 8.2 🖥️

c. O que é que este exemplo sugere sobre a heteroscedasticidade e a transformação usada na variável dependente?

A heteroscedasticidade no modelo logarítmico deverá ser menos importante, pois a diferença entre os desvios-padrão dos mínimos quadrados e dos mínimos quadrados robustos é menos importante