Econometria I

Aula 26

Ricardo Gouveia-Mendes
ricardo.mendes@iscte-iul.pt

Licenciatura em Economia
2.º Semestre 2023-24

Notas sobre Teoria Assimptótica

Técnicas e Dimensão da Amostra

Amostras de qualquer dimensão

Pressupostos OLS

1. Linearidade nos parâmetros
2. Amostra aleatória
3. Independência do erro: $\mathbb{E}(u|X) = 0$
4. Ausência de colinearidade perfeita
5. Homoscedasticidade: $\mathbf{Var}(u|X) = \sigma^2$
6. Normalidade do erro: $u \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$

Propriedades OLS

(1-4). Centricidade: $\mathbb{E}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \boldsymbol{\beta}$

(1-5). Eficiência (variância mínima entre os estimadores centrados)

(1-6). Normalidade:

$$\hat{\beta}_j \sim \mathcal{N}\left(\beta_j, \sigma^2_{\hat{\beta}_j}\right)$$

$$t \sim t_{N-p}, \quad F \sim F^q_{N-p}$$

Técnicas e Dimensão da Amostra

Amostras de grande dimensão $N \to \infty$

Pressupostos OLS

1. Linearidade nos parâmetros
2. Amostra aleatória
3. Independência do erro: $\mathbb{E}(u|X) = 0$
4. Ausência de colinearidade perfeita
5. Homoscedasticidade: $\mathbf{Var}(u|X) = \sigma^2$
6. Normalidade do erro: $u \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$

Propriedades assimptóticas OLS

(1-4). Consistência:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \boldsymbol{\beta}$$

(1-5). Eficiência assimptótica

(1-5). Normalidade assimptótica:

$$\hat{\beta}_j \mathrel{\dot{\sim}} \mathcal{N}\left(\beta_j, \sigma^2_{\hat{\beta}_j}\right)$$

$$t \mathrel{\dot{\sim}} t_{N-p}, \quad F \mathrel{\dot{\sim}} F^q_{N-p}, \quad LM \mathrel{\dot{\sim}} \chi^2_q$$

O teste do Multiplicador de Lagrange

- Válido **apenas assimptoticamente**
- Aplicável nos mesmos casos do teste F:
  - **Comparação de modelos** (modelo geral vs. modelo com q restrições)
  - **Significância global** (modelo geral vs. modelo com k restrições)

O teste do Multiplicador de Lagrange

- Estatística utilizada:

$$\boxed{LM = N \times R^2_{\hat{v}} \dot{\sim} \chi^2_q}$$

- Em que $R^2_{\hat{v}}$ se refere ao modelo:

$$\hat{v} = \gamma_0 + \gamma_1 X_1 + \cdots + \gamma_k X_k + w$$

- E $\hat{v}$ são estimativas do erro de um modelo com q restrições lineares aplicadas ao modelo geral:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_k X_k + u$$

O teste do Multiplicador de Lagrange
Exemplo

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + u$$

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0 \qquad H_1 : \text{ Não } H_0$$

1. Estimar o modelo restrito: $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_4 X_4 + v$
2. Calcular os resíduos do modelo restrito: $\hat{v}$
3. Estimar a regressão dos resíduos nas variáveis explicativas do modelo global: $\hat{v} = \gamma_0 + \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 X_3 + \gamma_4 X_4 + w$ e obter o $R^2_{\hat{v}}$
4. Realizar o teste $LM = N \times R^2_{\hat{v}} \dot{\sim} \chi^2_2$
   a. valor crítico
   b. p-value

O teste do Multiplicador de Lagrange

Testar a Significância Global

- Para a **significância global** ($q = k$) a estatística simplifica-se:

$$\boxed{LM = N \times R^2 \stackrel{.}{\sim} \chi^2_k}$$

- O modelo restrito é simplesmente $Y = \beta_0 + v$
- Como $\hat{v} = \gamma_0 + \gamma_1 X_1 + \cdots + \gamma_k X_k + w$, isso implica que:

$$Y = (\beta_0 + \gamma_0) + \gamma_1 X_1 + \cdots + \gamma_k X_k + w$$

- Ou seja, o R^2 **deste modelo é igual ao do modelo geral**

Exercícios

Exercício 5.1 🖥️

Considere os dados em `PESO.DTA` e o seguinte modelo para explicar o peso à nascença:

$$peso = \beta_0 + \beta_1 cigs + \beta_2 ordn + \beta_3 rend + \beta_4 educm + \beta_5 educp + u$$

onde peso é o peso à nascença, $cigs$ é o número médio de cigarros fumados pela mãe durante a gravidez, $ordn$ é a ordem de nascimento da criança, $rend$ é o rendimento anual familiar, $educm$ e $educp$ são o número de anos de escolaridade da mãe e do pai, respectivamente. Usando o teste F e o teste do multiplicador de Lagrange (LM):

a. Teste a hipótese de que, após ter em conta os outros fatores, a educação dos pais não tem efeito no peso do bebé à nascença.

Exercício 5.1 🖥️

Alínea a)

$$H_0 : \beta_4 = \beta_5 = 0 \qquad H_1 : \text{Não } H_0$$

Teste F

Estimação do modelo geral: `regress peso cigs ordn rend educm educp`

```
Call:
lm(formula = peso ~ cigs + ordn + rend + educm + educp, data = df)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-2.6829 -0.3314  0.0320  0.3681  4.2470 
```

Exercício 5.1 🖥️

Alínea a) | Teste F

Estimação do modelo restrito: `regress peso cigs ordn rend`

```
Call:
lm(formula = peso ~ cigs + ordn + rend, data = df)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-2.6901 -0.3356  0.0233  0.3737  4.2440 
```

Exercício 5.1 🖥️

Alínea a) | Teste F

Realização do teste com a estatística F para um nível de significância de 5%:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \beta_4 = \beta_5 = 0 \\
H_1 &: \text{Não } H_0
\end{aligned}
$$

$$
F = \frac{R^2 - R_*^2}{1 - R^2} \frac{N - p}{q} =
$$

$$
= 1.3332 < 3.0108 = F^2_{599}
$$

$$
p\text{-value} = 0.2644 > 0.05 = \alpha
$$

- **Não rejeitamos** a hipótese nula
- O modelo restrito parece melhor
- A educação dos pais não tem efeito no peso do bebé à nascença

Exercício 5.1 🖥️

Alínea a) | Teste LM

Teste LM

- Estimar o modelo restrito ✅
- Calcular resíduos do modelo restrito: `predict vhat, resid`
- Estimar o modelo dos resíduos e obter o respetivo R^2: `regress vhat cigs ordn rend educm educp`

```
Call:
lm(formula = uhat ~ cigs + ordn + rend + educm + educp, data = df)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-2.6829 -0.3314  0.0320  0.3681  4.2470 
```

Exercício 5.1 🖥️
Alínea a) | Teste LM

Realização do teste LM para um nível de significância de 5%:

$$LM = N \times R^2_{\hat{v}} =$$
$$= 2.6813 < 5.9915 = \chi^2_2$$

$$p\text{-value} = 0.2617 > 0.05 = \alpha$$

- **Não rejeitamos** a hipótese nula
- Pelo que chegamos exatamente à mesma conclusão que anteriormente

Exercício 5.1 🖥️
Alínea b)

b. Teste a significância global do modelo.

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0 \qquad H_1 : \text{ Não } H_0$$

Teste F

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{N - p}{k} =$$
$$= 4.5128 > 2.2291 = F^5_{599}$$

$$p\text{-value} = 5e - 04 < 0.05 = \alpha$$

Rejeitamos a hipótese nula. O modelo ajusta-se bem aos dados.

Teste LM

$$LM = N \times R^2 =$$
$$= 21.9625 > 11.0705 = \chi^2_5$$

$$p\text{-value} = 5e - 04 < 0.05 = \alpha$$

Rejeitamos a hipótese nula. O modelo ajusta-se bem aos dados.